P-VALENTLY STARLIKE FUNCTIONS AND CONVEX FUNCTIONSについて(単葉関数とBriot-Bouquet 微分方程式)

福井, 誠一

数理解析研究所講究録
963巻 1996年 23-28

P-VALENTLY STARLIKE FUNCTIONS AND CONVEX FUNCTIONS について

和歌山大学・教育　福井誠一
(Seiichi FUKUI)

§1. 準備

U を複素平面 C 内の開単位円板 $U=\{z\in C;|z|<1\}$ とする． p, n を正の整数として

$$f(z)=z^p+a_{p+n}z^{p+n}+\cdots\cdots \tag{1.1}$$

を U 内で正則な関数とし，この関数の全体を $\Lambda_p(n)$ とおく． $p>\alpha\geqq 0$ を満たす定数 α に対して $f(z)\in\Lambda_p(n)$ のとき，

$$\mathrm{Re}\frac{zf'(z)}{f(z)}>\alpha,\qquad z\in U \tag{1.2}$$

を満たす関数を p-valently starlike function of order α（位数 α の p 葉星型関数)といってこの関数全体を $S^*_p(\alpha)$ とおく．また，$f(z)\in\Lambda_p(n)$ のとき，

$$\mathrm{Re}(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)})>\alpha,\qquad z\in U \tag{1.3}$$

を満たす関数を p-valently convex function of order α（位数 α の p 葉凸型関数)といってこの関数全体を $K_p(\alpha)$ とおく． $p=n=1$ のときは，$\Lambda_1(1)=\Lambda$ とおく．また，$S^*_1(\alpha)=S^*(\alpha)$，$K_1(\alpha)=K(\alpha)$，$S^*(0)=S^*$，$K(0)=K$ とする．S を U から f(U) $(f(z)\in\Lambda)$ の上への1対1正則な関数 f(z) の全体とすると，S は単葉関数族と呼ばれ

$$\Lambda\supset S\supset S^*\supset K \tag{1.4}$$

は知られている．

Marx [3] と Strohhäcker [4] は独立に次の結果を示した．

<u>定理 M-S.</u>　　$K\subset S^*(1/2)$.

即ち，すべての凸型関数は位数 1/2 の星型関数であることを示している．また，次のようにも表現できる．

任意の $f(z)\in A$ にたいして，$\mathrm{Re}\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)>0,\ z\in U$ が成立すれば，

$$\mathrm{Re}\,\frac{zf'(z)}{f(z)}>\frac{1}{2},\quad z\in U \text{ が成立する．} \tag{1.5}$$

この報告では，この Marx-Strohhäcker の結果が p 葉な関数についても成立するか否かに答えたものである．特に，極値関数について詳しく述べる．

§2. p 葉関数について

p 葉関数については次の結果が得られる．

<u>定理 1.</u> 関数族 $A_p(n)$ 内では，

$$K_p(\alpha)\subset S^*_p(\beta) \tag{2.1}$$

が成立する．ただし，α,β は $p>\alpha\geqq 0,\ p>\beta\geqq 0$ を満たし，さらに次の条件を満たすものとする．

$$p>\beta\geqq\frac{p}{2} \text{ のとき，}\qquad \beta+\frac{n(\beta-p)}{2\beta}\leqq\alpha, \tag{2.2}$$

$$\frac{p}{2}\geqq\beta\geqq 0 \text{ のとき，}\qquad \beta+\frac{n\beta}{2(\beta-p)}\leqq\alpha. \tag{2.3}$$

これは，次の補題2（福井 [2] 定理2)の直接の結果である．

<u>補題 2.</u> 関数 $f(z)\in A_p(n)$ に対して，α,β を実数として，

$$\mathrm{Re}\left\{\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)+\alpha\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\}>\beta,\qquad z\in U \tag{2.4}$$

を満たせば，$f(z)\in S^*_p(\gamma)$ である． ただし，$(1+\alpha)p>\beta$ かつ

$$p>\gamma\geqq\frac{p}{2} \text{ のとき，}\qquad (1+\alpha)\gamma+\frac{n(\gamma-p)}{2\gamma}\leqq\beta, \tag{2.5}$$

$$\frac{p}{2}\geqq\gamma\geqq 0 \text{ のとき，}\qquad (1+\alpha)\gamma+\frac{n\gamma}{2(\gamma-p)}\leqq\beta \tag{2.6}$$

を満たすものとする．

補題２で，$\alpha=0$ とおき，β を α，γ を β と置換すると，定理１が得られる．また，定理１で $\alpha=0$，$n=1$ として次の系３を得る．

系 3. $$K_p(0) \subset S^*_p(0). \tag{2.7}$$

この結果は最良である．即ち，どんな正の数 α に対しても，$K_p(0) \subset S^*_p(\alpha)$ とはならない．何故なら，極値関数

$$f_p(z)=\frac{P_p(z)}{(1-z)^{2p-1}}, \tag{2.8}$$

$$P_p(z)=z^p+\left(-\frac{p-1}{p+1}\right)z^{p+1}+\cdots\cdots+\left(-\frac{p-1}{p+1}\right)\left(-\frac{p-2}{p+2}\right)\cdots\cdot\left(-\frac{1}{2p-1}\right)z^{2p-1} \tag{2.9}$$

が存在するからである．

§3. 極値関数 $f_p(z)$ が $f_p(z)\in K_p(0)$ でかつ，$f_p(z)\in S^*_p(0)$ であることの証明

この極値関数は，

$$f'_p(z)=\frac{pz^{p-1}}{(1-z)^{2p}} \tag{3.1}$$

即ち，

$$1+\frac{zf''_p(z)}{f'_p(z)}=p\cdot\frac{1+z}{1-z} \tag{3.2}$$

から求められたものである．(3.2) から $f_p(z)\in K_p(0)$ は明らかである．系３の結果から，$f_p(z)\in S^*_p(0)$ が成立していることは認めてよい．次に，どんな正の α に対しても決して

$$f_p(z)\in S^*_p(\alpha) \quad 即ち, \quad \mathrm{Re}\,\frac{zf'_p(z)}{f_p(z)}>\alpha,\ z\in U \tag{3.3}$$

とならないことを示さなければならない．

$f_p(z)=\dfrac{P_p(z)}{(1-z)^{2p}}$ とおくと，$f'_p(z)=\dfrac{(1-z)P'_p(z)+(2p-1)P_p(z)}{(1-z)^{2p}}$ となるから，

$$(1-z)P'_p(z)+(2p-1)P_p(z)=pz^{p-1} \tag{3.4}$$

が得られ，これを解いて (2.8)，(2.9) を得たのである．

さて， $f_p(z)\in S^*{}_p(0)$ を示すために，

$$W(z) = \frac{zf'{}_p(z)}{f_p(z)} = \frac{pz^p}{(1-z)P_p(z)} = \frac{p}{(1-z)Q(z)} = \frac{p}{R(z)} \tag{3.5}$$

とおいて，Re $W(z)>0$，$z\in U$ を示さなければならない．それには，

$$P_p(z) = z^pQ(z) \tag{3.6}$$

$$R(z)= U(z)+iV(z) \tag{3.7}$$

から，

$$Q(z)=1+q_1z+q_2z^2+\cdots\cdots+q_{p-1}z^{p-1}, \tag{3.8}$$

$$q_k=(-\frac{p-1}{p+1})(-\frac{p-2}{p+2})\cdots\cdot(-\frac{p-k}{p+k}), \qquad (\ k=1,2,\cdots\ )$$

$$R(z)=1+(q_1-1)z+(q_2-q_1)z^2+\cdots\cdots+(q_{p-1}-q_{p-2})z^{p-1}+q_{p-1}z^p \tag{3.9}$$

を得て，これから， $\mathrm{Re}W(z)=\dfrac{pU(z)}{U(z)^2+V(z)^2}$，となり，$U(z)$ は系３から $U(z)>0$，$z\in U$ が成立し，特に，$|z|\leqq 1$ で調和関数である．$z\to 1$ のとき $\mathrm{Re}W(z)\to 0$ を示せばよい．

調和関数の最小値の原理から，$|z|=1$ で考えてよい．$r=1$ として，$R(e^{i\theta})=U(e^{i\theta})+iV(e^{i\theta})$ を $R(\theta)=U(\theta)+iV(\theta)$ とおく．このとき，(3.5) と (3.7) から

$$\mathrm{Re}W(\theta)=\frac{pU(\theta)}{U(\theta)^2+V(\theta)^2} \tag{3.10}$$

を得，また，(3.7),(3.9) から次の関係式を得る．

$$U(\theta)=1+(q_1-1)\cos\theta+(q_2-q_1)\cos2\theta+\cdots\cdots+(q_{p-1}-q_{p-2})\cos(p-1)\theta-q_{p-1}\cos p\theta,$$

$$V(\theta)=(q_1-1)\sin\theta+(q_2-q_1)\sin2\theta+\cdots\cdots+(q_{p-1}-q_{p-2})\sin(p-1)\theta-q_{p-1}\sin p\theta.$$

故に，$U(0)=V(0)=U'(0)=U''(0)=0$， $V'(0)=-\dfrac{p}{2p-1}\neq 0$ （ $U''(0)=Q(1)+2Q'(1)$，$V'(0)=-P'{}_p(1)=-Q(1)$ に注意する ）から，

$$\lim_{\theta\to 0} W(\theta)=\lim_{\theta\to 0}\frac{pU(\theta)}{U(\theta)^2+V(\theta)^2}=\lim_{\theta\to 0}\frac{pU'(\theta)}{2(U(\theta)U'(\theta)+V(\theta)V'(\theta))}$$

$$=\lim_{\theta\to 0}\frac{pU''(\theta)}{2(U(\theta)U''(\theta)+U'(\theta)^2+V(\theta)V''(\theta))+V'(\theta)^2)}=0$$

を得る．故に，$z=1$ の近くには $\mathrm{Re}\ W(\theta)>0$, $z\in U$ で かつ $\mathrm{Re}\ W(z)\fallingdotseq 0$ となる点が存在するからである．

§4．コメント

本稿が出来上がるまでには，何人かのアドバイスを戴いた．ここにその経緯を述べて，お礼に変えたい．

まず，系3を予想したのは布川氏である．これを著者は［2］からの系として導いた．しかし，定理1の証明には，直接［1］を使って証明することもできる．注意することは，いずれにしても定理1は sharp な結果ではない．はじめに，極値関数 $f_p(z)$ が $f_p'(z)=\dfrac{pz^{p-1}}{(1-z)^{2p}}$ から得られることを示したのは，著者である．山川氏は p=2,3 のとき直接 $f_2(z)=\dfrac{z^2(z-3)}{3(z-1)^3}$,

$f_3(z)=-\dfrac{z^3(10-5z^2+z^3)}{10(z-1)^5}$ を求めて $f_j(z)\in K_j(0)$ と同時に$f_j(z)\in S^*_j(0)$ (j=1,2)

を証明した．また，等角写像図をコンピュータで描いて示した．さらに，$U(\theta)=A(1-\cos\theta)^p$（Aは定数）と予想した．著者は p=2,3,4,5 までは，山川氏とは違う方法で証明をし，このAについて具体的数値を得ていた．後に，須川氏が

$$U(\theta)=\frac{2^p(p!)^2}{(2p)!}(1-\cos\theta)^p=\frac{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot p}{1\cdot 3\cdots(2p-1)}(1-\cos\theta)^p$$

を得たとの報告を受けた．また，須川氏と布川氏には極値関数の一般の p についての証明では有力な助言を戴いた。その後，布川氏はこれについて別証明を得たとの報告を受けている．

REFERENCES

[1] S.Fukui, On Jack's lemma and Miller-Mocanu's lemma, Bull.Fac. Edu.Wakayama Univ.Nat. Sci.,45(1995),1-7.

[2] S.Fukui, α-starlike functions of order β について,京都大学数理解析研究所講究録 917(1995),1-6.

[3] A.Marks,Untersuchungen über schlichte Abbildungen,Math.Ann.,(1932),40-67.

[4] E.Strohhäcker, Beitrage zur Theorie der schlichiten Functionen, Math.Z.,37(1933), 356-380.